数理解析研究所講究録
624巻 1987年 83-88

Link の closed braid 表示と Seifert circles.

愛媛大 理　　山田 修司

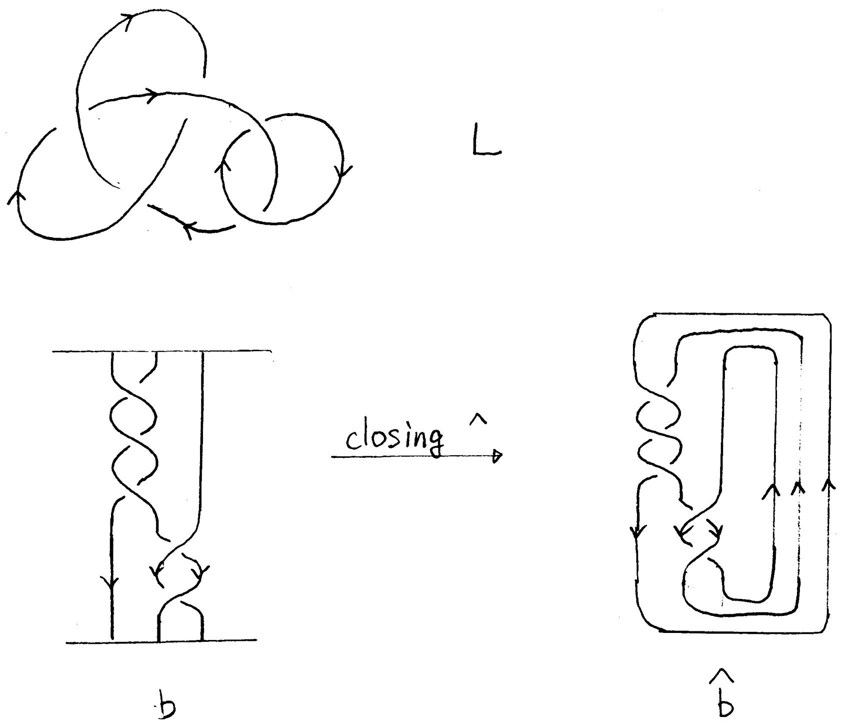
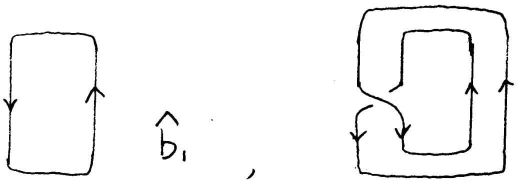


図1

上図の braid b の上下をつなぐことにより closed braid $\hat{b}$ が得られる。これは $\mathbb{R}^3$ 内の oriented link diagram である。この link type は 上の link L と同じものである。このように、一つの link type L を closed braid で表わすことを、closed braid 表示という。

一つの link type に対して、その closed braid 表示は、一通りではない。例えば、次の closed braid $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ は ともに、trivial knot O の closed braid 表示である。



$\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ 図2

b_1 は 1-string braid であり，b_2 は 2-string braid である。

link type L に対し，それの closed braid 表示の string 数の最小値を braid index といい $b(L)$ で表わす。trivial knot O に対しては，$b(O) = 1$ であり，図1の link L に対しては，$b(L) = 3$ である。

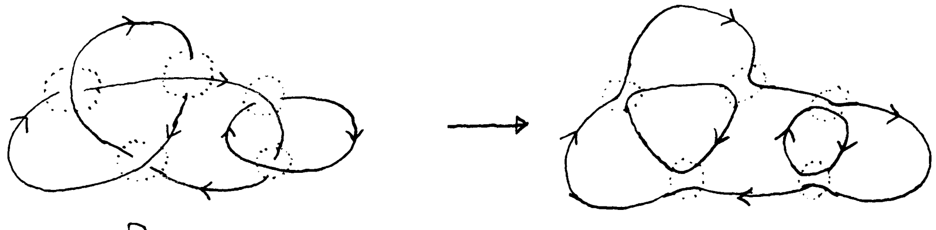
任意の oriented link type が closed braid 表示を持つことは，Alexander によって示されている [1],[2]。それは，任意の oriented link diagram D を closed braid $\hat{b}$ に変形する，アルゴリズムとして与えられている。しかしながら その $\hat{b}$ の string 数は D の link type L の braid index $b(L)$ をはるかに越えてしまう。そこで，closed braid 表示の string 数を，$b(L)$ に近づけるよう，アルゴリズムを改良する。

（注意 $b(L)$ に等しい string 数を持つような closed braid 表示を与えるアルゴリズムは，“Knot の triviality の判定” という未解決の問題を含んでいるので，現在のところ 発見されていない。）

そこで、次の定理が得られた。

<u>定理 1.</u>　任意の oriented link diagram D は、その Seifert circles の数 s(D) と等しい string 数をもつ closed braid $\hat{b}$ に regular isotopy により変形できる。

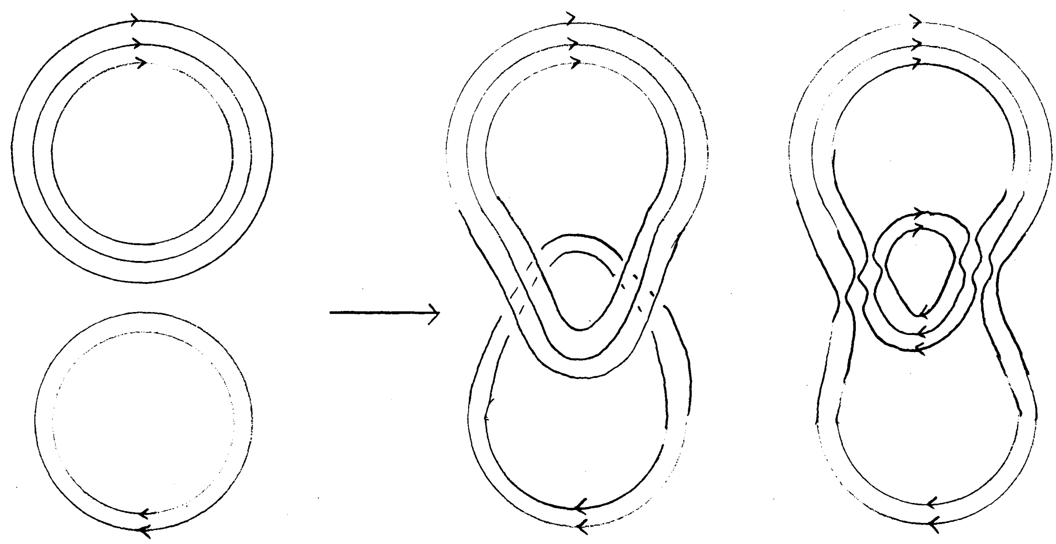
ここで、Seifert circles とは D の各 crossing を smoothing することにより得られる circles のことである。



D　　s(D) = 3

図3

定理1の証明の本質的なことは、次のことだけである。



i)　ii)　iii)

（同心円になっていない Seifert circles i) は ii) のように regular isotopy で変形することにより，Seifert circles は iii) のように同心円となる。)

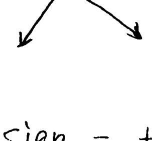
Oriented link L に対し，L を与える diagram の Seifert circles の数の最小値を $s(L)$ と表わす。closed braid $\hat{b}$ の string 数は $\hat{b}$ の Seifert circles の数に等しいことを注意すると，定理1より，次が得られる。

定理2. 任意の oriented link L に対し $b(L) = s(L)$.

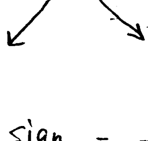
また，定理1.は，regular isotopy で変形させているから，diagram の twisting number (writhe) も不変とする。i.e. $w(D) = w(\hat{b})$。

ここで，D の twisting number とは

$$w(D) = \sum_{c} \mathrm{sign}(c),$$ （c は D の全ての crossing を動く）



sign = +1



sign = −1

次のような4つの不変量を考える

$$m(L) = \max\{\, w(D) - (s(D)-1) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram} \,\}$$
$$M(L) = \min\{\, w(D) + (s(D)-1) \mid \quad " \quad \}$$
$$m'(L) = \max\{\, w(\hat{b}) - (s(\hat{b})-1) \mid \hat{b} \text{ は } L \text{ の closed braid 表示} \,\}$$
$$M'(L) = \min\{\, w(\hat{b}) + (s(\hat{b})-1) \mid \quad " \quad \}$$

これらの不変量により、L の 2-variable Jones polynomial $P_L(\ell, m)$ [4] の ℓ の degree が評価できることが、[3], [5], [6], に述べられている。すなわち、

$$\underline{d}(L) = \text{low deg}_\ell\, P_L(\ell, m), \quad \bar{d}(L) = \text{high deg}_\ell\, P_L(\ell, m)$$

とするとき

(1) $m(L) \leqq \underline{d}(L) \leqq \bar{d}(L) \leqq M(L)$

(2) $m'(L) \leqq \underline{d}(L) \leqq \bar{d}(L) \leqq M'(L)$.

しかしながら、定理1より導びかれる次の系により、上の(1), (2) の2つの式は本質的に同値であることがわかる。

<u>系</u>　任意の oriented link L に対し、$m(L) = m'(L)$, $M(L) = M'(L)$

References

[1] Alexander,J.W.; A lemma on system of knotted curves. Proc. Nat. Academ. Science USA, 9 93-95(1923).

[2] Birman,J.S.; Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies; No 82,Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press (1974).

[3] Franks,J., Williams,R.F.; Braids and the Jones-Conway polynomial. (Preprint 1985).

[4] Freyd,P., Yetter,D.; Hoste,J.; LIckorish,W.B.R., Millet,K.; Ocneanu,A.; A new polynomial invariant of knots and links. Bull. Amer. Math. Soc. 12, 239-246 (1985).

[5] Morton,H.R.; Seifert circles andknot polynomials. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99, 107-109 (1986).

[6] Morton,H.R.; Closed braid representations for a link, and its 2-variable polynomial.(Preprint Liverpool 1985).